13 不定方程式

112

(1)

$2xy+6x+y=(2x+1)(y+3)-3$ より，$(2x+1)(y+3)=119$

これと，$119=7\cdot 17$，$2x+1\geq 3,\ y+3\geq 4$ より，$(2x+1,\ y+3)=(7,\ 17),\ (17,\ 7)$

$\therefore (x,\ y)=(3,\ 14),\ (8,\ 4)$

(2)

$\begin{cases} x+y=-z+14 \\ 5x+7y=3z+24 \end{cases}$ より，$x=-5z+37,\ y=4z-23$ ・・・①

ここで，①について，$x>0$ かつ $y>0$ より，$-5z+37>0$ かつ $4z-23>0$

すなわち $\dfrac{23}{4}<z<\dfrac{37}{5}$

よって，整数 z は 6 または 7

これを①にそれぞれ代入することにより，$(x,\ y,\ z)=(7,\ 1,\ 6),\ (2,\ 5,\ 7)$

113

(1)

$$\begin{aligned} x &= \frac{-13y+1111}{7} \\ &= \frac{-14y+y+158\cdot 7+5}{7} \\ &= -2y+158+\frac{y+5}{7} \end{aligned}$$

より，

$7x+13y=1111$ ・・・① の解の 1 つは $x=155,\ y=2$

すなわち $7\cdot 155+13\cdot 2=1111$ ・・・②

①－②より，$7(x-155)+13(y-2)=0$ $\therefore 7(x-155)=13(-y+2)$

7 と 13 は互いに素だから，一般に，整数 k を用いて，$x-155=13k,\ -y+2=7k$

すなわち $x=13k+155,\ y=-7k+2$ と表せる。$13k+155>0$ かつ $-7k+2>0$

よって，k は $-11-\dfrac{12}{13}<k<\dfrac{2}{7}$ を満たす整数，すなわち $-11,\ -10,\ \cdots,\ 0$ の 12 個の整数である。

ゆえに，①を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ は 12 個ある。

(2)

(1)より，$x=13k+155,\ y=-7k+2$

よって，$s=-(13k+155)+2(-7k+2)=-27k-151$

これと k は -11 以上 0 以下の整数より，

$-27k-151$ は $k=-11$ で最大値 146 を，$k=0$ で最小値 -151 をとる。

よって，s の最大値は 146，最小値は -151

(3)

(2)と同様にして，$t=|2x-5y|=|61k+300|$

k は -11 以上 0 以下の整数だから，$61k+300$ は -371 以上 300 以下の整数である。

よって，$|61k+300|$ は $k=-11$ で最大値 371 をとる。

また，$k=-5$ のとき $61k+300=-5$，$k=-4$ のとき $61k+300=56$ より，

$|61k+300|$ は $k=-5$ で最小値 5 をとる。

ゆえに，t の最大値は 371，最小値は 5

114

(1)

$$\begin{aligned} f(x,\ y)&=2x^2+11yx+(3y-2)(4y+1) \\ &=(x+4y+1)(2x+3y-2) \end{aligned}$$

(2)

$f(x,\ y)=(x+4y+1)(2x+3y-2)$ において，$x,\ y$ は自然数だから，

$x+4y+1\geq 6,\ 2x+3y-2\geq 3$

これと，$56=2^3\cdot 7$ より，$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(7,\ 8),\ (8,\ 7),\ (14,\ 4)$ が考えられる。

$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(7,\ 8)$ のとき　$(x,\ y)=\left(\dfrac{22}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$　よって，不適。

$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(8,\ 7)$ のとき　$(x,\ y)=(3,\ 1)$

$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(14,\ 4)$ のとき　$(x,\ y)=(-3,\ 4)$　よって，不適。

以上より，$(x,\ y)=(3,\ 1)$

115

(1)

与式を x について整理すると，$3x^2-2(y+2)x+2y^2+5y+2=0$

これを x の 2 次方程式と見なすと，条件より，x は実数をもつから，

判別式を D とすると，$D\geq 0$

また，$\dfrac{D}{4}=-5y^2-11y-2=-(5y+1)(y+2)$

よって，$(5y+1)(y+2)\leq 0$　$\therefore -2\leq y\leq -\dfrac{1}{5}$

(2)

(1)より，整数 y は -2 または -1

$y=-2$ を $3x^2-2(y+2)x+2y^2+5y+2=0$ に代入すると，$3x^2=0$　$\therefore x=0$

$y=-1$ を $3x^2-2(y+2)x+2y^2+5y+2=0$ に代入すると，$3x^2-2x-1=0$

すなわち $(3x+1)(x-1)=0$　$\therefore x=-\dfrac{1}{3},\ 1$

よって，$x,\ y$ がともに整数である解は $(x,\ y)=(0,\ -2),\ (1,\ -1)$

116

$n=3x+7y$ の形で表せない自然数 n

解法 1

$3\cdot(-2)+7\cdot 1=1$ より，$3\cdot(-2n)+7\cdot n=n$

これと $3x+7y=n$ の各辺の差をとると，$3(x+2n)+7(y-n)=0$　$\therefore 3(x+2n)=7(-y+n)$

3 と 7 は互いに素だから，整数 k を用いると，$x+2n=7k,\ -y+n=3k$

よって，$n=3x+7y$ の解は $x=-2n+7k,\ y=n-3k$

$x,\ y$ は負でない整数だから，$-2n+7k\geq 0$ かつ $n-3k\geq 0$

よって，$3k\leq n\leq \frac{7}{2}k$

n は自然数だから，$k\geq 1$

また，$\frac{7}{2}k\geq 3(k+1)$ すなわち $k\geq 6$ を満たす任意の自然数 n は負でない整数 $x,\ y$ で表せる。

よって，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ で調べればよい。

$k=1$ のとき　$3\leq n\leq \frac{7}{2}$

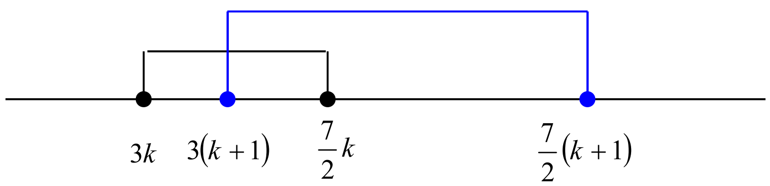
$k=2$ のとき　$6\leq n\leq 7$

$k=3$ のとき　$9\leq n\leq \frac{21}{2}$

$k=4$ のとき　$12\leq n\leq 14$

$k=5$ のとき　$15\leq n\leq \frac{15}{2}$

よって，求める自然数は $1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 11$



解法 2

$3x+7y=3(x+2y)+y$ より，

$y=0$ のとき $3x+7y=3x$

$y=1$ のとき $3(x+2)+1$

$y=2$ のとき $3(x+4)+2$

よって，負でない整数 $x,\ y$ を用いて，3 以上のすべての 3 で割り切れる数，7 以上のすべての 3 で割って 1 余る数，14 以上のすべての 3 で割って 2 余る数を表すことができる。

ゆえに，求める自然数は $1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 11$

$2008=3x+7y$ を満たす正の整数 $x,\ y$ の組の個数

解法 1 の $x=-2n+7k,\ y=n-3k$ に $n=2008$ を代入すると，

$x=-4016+7k,\ y=2008-3k$

$x\geq 1,\ y\geq 1$ より，$-4016+7k\geq 1,\ 2008-3k\geq 1$

よって，k は 574 以上 669 以下の整数

ゆえに，求める組の個数は 96

117

条件より，$\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{1}{z}$ だから，$\dfrac{3}{x}\geq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

よって，自然数 x がとることができる値は $1,\ 2,\ 3$

$x=1$ のとき

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ となり不適

$x=2$ のとき

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore yz-2y-2z=0$

これより，$(y-2)(z-2)=4$

これと $2\leq y\leq z$ より，$(y-2,\ z-2)=(1,\ 4),\ (2,\ 2)$ $\quad\therefore (y,\ z)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$

$x=3$ のとき

$x=2$ のときと同様にして，$(2y-3)(2z-3)=9$

これと $3\leq y\leq z$ より，$(2y-3,\ 2z-3)=(3,\ 3)$ $\quad\therefore (y,\ z)=(3,\ 3)$

以上より，$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

補足

続いて y の値を絞り込んで解いてもよい。

たとえば，$x=2$ のとき

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{1}{z}$ より，$\dfrac{2}{y}\geq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore y\leq 4$

これと $2\leq y$ より，自然数 y がとることができる値は $2,\ 3.\ 4$

$y=2$ のとき $\quad\dfrac{1}{z}=0$ となり不適

$y=3$ のとき $\quad\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$ より，$z=6$

$y=4$ のとき $\quad\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$ より，$z=4$

118

解法 1

$1 \le a \le b \le c \le d$ と仮定すると，$abcd \le 4d$ より，$d(abc-4) \le 0$

これと $d \ge 1$ より，$abc \le 4$

よって，$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3),\ (1, 2, 2\ ),\ (1,\ 1,\ 4)$

これと $abcd = a+b+c+d$ かつ $1 \le a \le b \le c \le d$ より，$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 1,\ 2,\ 4)$

$a,\ b,\ c,\ d$ の他の大小関係も考慮することにより，

$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1,\ 4),\ (1,\ 4,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 4,\ 1),\ (1,\ 4,\ 2.\ 1),\ (2,\ 1,\ 1,\ 4),$
$(4,\ 1,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 4,\ 1),\ (4,\ 1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1,\ 1),\ (4,\ 2,\ 1,\ 1)$

解法 2

$1 \le a \le b \le c \le d$ と仮定すると，$abcd \le 4d$ より，$abc \le 4$　・・・①

これと $a^3 \le abc$ より，$a^3 \le 4$　$\therefore a = 1$

これと①および $b^2 \le bc,\ 1 \le b$ より，$1 \le b^2 \le 4$

よって，$b = 1,\ 2$

$a = b = 1$ のとき

$cd = 2 + c + d$ より，$(c-1)(d-1) = 3$　$\therefore (c-1,\ d-1) = (1,\ 3)$　$\therefore c = 2,\ d = 4$

これは $1 \le a \le b \le c \le d$

$a = 1,\ b = 2$ のとき

$2cd = 3 + c + d$ より，$(2c-1)(2d-1) = 7$　$\therefore (2c-1,\ 2d-1) = (1,\ 7)$　$\therefore c = 1,\ d = 4$

これは $1 \le a \le b \le c \le d$ を満たさない。よって，不適

以上より，$1 \le a \le b \le c \le d$ のとき，$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 1,\ 2,\ 4)$

$a,\ b,\ c,\ d$ の他の大小関係も考慮することにより，

$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1,\ 4),\ (1,\ 4,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 4,\ 1),\ (1,\ 4,\ 2.\ 1),\ (2,\ 1,\ 1,\ 4),$
$(4,\ 1,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 4,\ 1),\ (4,\ 1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1,\ 1),\ (4,\ 2,\ 1,\ 1)$

119

(1)

与式より，$1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{5}{3}$　$\therefore \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{xy} = 0$

両辺に $6xy$ を掛けると，$4xy - 6y - 6x - 6 = 0$　$\therefore (2x-3)(2y-3) = 15$

$2 \le x < y$ より，$1 \le 2x - 3 < 2y - 3$

よって，$(2x-3,\ 2y-3) = (1,\ 15),\ (3,\ 5)$　$\therefore (x,\ y) = (2,\ 9),\ (3,\ 4)$

(2)

解法 1

$0 < \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{12}{5} = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(1 + \dfrac{1}{z}\right) < \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^3$

$1.3^3<\dfrac{12}{5}<1.4^3=\left(1+\dfrac{1}{2.5}\right)^3<\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^3$

また，$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}<\dfrac{12}{5}$

よって，$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3<\dfrac{12}{5}<\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^3$

これと$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$は単調に減少することと$x\geq 2$より，$x=2$

このとき，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$　すなわち$\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{8}{5}$

両辺に$15yz$を掛け，整理すると，$9yz-15y-15z-15=0$

よって，$(3y-5)(3z-5)=40$

ここで，$3\leq y<z$より，$4\leq 3y-5<3z-5$

ゆえに，$(3y-5,\ 3z-5)=(4,\ 10),\ (5,\ 8)$

これと，$y,\ z$は$3\leq y<z$を満たす自然数であることから，$(y,\ z)=(3,\ 5)$

以上より，$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$

解法 2

条件より，$x\geq 2,\ y\geq 3,\ z\geq 4$　・・・①

よって，$1+\dfrac{1}{x}\leq 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2},\ 1+\dfrac{1}{y}\leq 1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

これより，$\dfrac{12}{5}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)\leq\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=2\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$　$\therefore\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{1}{5}$　$\therefore z\leq 5$

これと①より，考えられる$(x,\ y,\ z)$は$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 4,\ 5),\ (3,\ 4,\ 5)$

これらのうち$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$が成り立つ$(x,\ y,\ z)$の組は$(2,\ 3,\ 5)$

120

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=p^2$

条件より，$x+y\geq 2$

よって，$(x+y,\ x^2-xy+y^2)=(p,\ p),\ (p^2,\ 1)$ が考えられる。

$(x+y,\ x^2-xy+y^2)=(p,\ p)$のとき

$x+y=p$ より，$y=p-x$

これを $x^2-xy+y^2=p$ に代入し，x について整理すると，$3x^2-3px+p^2-p=0$

x は自然数だから，判別式を D とすると，$D\geq 0$ であることが必要。

これと $D=9p^2-12p^2+12p=-3p(p-4)$ より，$-3p(p-4)\geq 0$ $\therefore 0\leq p\leq 4$

ゆえに，素数 p は 2 または 3 であることが必要である。

そこで，それぞれを $3x^2-3px+p^2-p=0$ および $x+y=p$ に代入し，

その連立方程式を解くことにより $x,\ y$ が自然数であるという条件を満たすかを調べる。

$p=2$ のとき

$3x^2-6x+2=0$ より，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ x は自然数でないから不適

$p=3$ のとき

$3x^2-9x+6=0$ より，$3(x-1)(x-2)=0$

これと $x+y=3$ より，$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ よって，条件を満たす。

$(x+y,\ x^2-xy+y^2)=(p^2,\ 1)$のとき

上と同様にして，$x^2-xy+y^2=p^2$ から y を消去し，式を整理すると，

$3x^2-3p^2x+p^4-1=0$

判別式を D とすると，$D\geq 0$ であることが必要で，

$D=-3p^4+12=-3(p^4-4)$より，$-3(p^4-4)\geq 0$ $\therefore p^4\leq 4$

よって，p は素数でないゆえ，不適

以上より，素数 p は 3 で，このとき $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

121

(1)

$65=31\cdot 2+3$，$31=3\cdot 10+1$ より，

$$
\begin{aligned}
1&=31-3\cdot 10\\
&=31-(65-31\cdot 2)\cdot 10\\
&=65\cdot(-10)+31\cdot 21
\end{aligned}
$$

よって，$65\cdot(-10)+31\cdot 21=1$ と $65x+31y=1$ の各辺の差をとることにより，

$65(x+10)+31(y-21)=0$ $\quad\therefore 65(x+10)=31(-y+21)$

65 と 31 は互いに素だから，整数 k を用いると，$x+10=31k,\ -y+21=65k$

$\therefore (x,\ y)=(31k-10,\ -65k+21)$（$k$ は整数）

補足

上は，65 と 31 は互いに素（最大公約数が 1）だから，ユークリッドの互除法で余り 1 となることを利用し，特殊解 $(x,\ y)=(-10,\ 21)$ を得たが，

$65x+31y=1$ を変形し，

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{1-65x}{31}\\
&=\frac{1-3x-62x}{31}\\
&=\frac{1-3x}{31}-2x
\end{aligned}
$$

とし，これから $(x,\ y)=(-10,\ 21)$ を得る方法もある。

(2)

$65x+31y=2016$ を変形すると，

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{2016-65x}{31}\\
&=\frac{31\cdot 65+1-62x-3x}{31}\\
&=65-2x+\frac{1-3x}{31}
\end{aligned}
$$

よって，$65x+31y=2016$ の整数解の 1 つは $(-10,\ 86)$ である。

すなわち $65\cdot(-10)+31\cdot 86=2016$

これと $65x+31y=2016$ の各辺の差をとることにより，$65(x+10)+31(y-86)=0$

よって，(1)と同様にして，$(x,\ y)=(31l-10,\ -65l+86)$（$l$ は整数）

$x,\ y$ が正の整数のとき，$31l-10>0$ かつ $-65l+86>0$ より，$\dfrac{10}{31}<l<\dfrac{86}{65}$ $\quad\therefore l=1$

ゆえに，求める解は $(x,\ y)=(21,\ 21)$

(3)

解法 1

(1)より，$65\cdot(-10)+31\cdot(21)=1$

よって，$65\cdot m\cdot(-10)+31\cdot m\cdot(21)=m$ すなわち $-65\cdot 10m+31\cdot 21m=m$

これと $65x+31y=m$ の各辺の差をとることにより，$65(x+10m)+31(y-21m)=0$

よって，(1)と同様にして，$65x+31y=m$ を満たす整数解を求めると，

$x=31n-10m,\ y=-65n+21m$ （n は整数）

とくに，$x,\ y$ が正の整数のとき，

$31n-10m>0$ かつ $-65n+21m>0$ より，$\dfrac{10m}{31}<n<\dfrac{21m}{65}$

n は整数だから，$\dfrac{21m}{65}-\dfrac{10m}{31}=\dfrac{31\cdot 21-65\cdot 10}{2015}\cdot m=\dfrac{m}{2015}>1$ が成り立たなければならないが，

これは $m\geq 2016$ より成り立つ。

よって，2016 以上の整数 m は，正の整数 $x,\ y$ を用いて $65x+31y=m$ と表せる。

解法 2

$m-31y$ について，$m\geq 2016>2015=31\cdot 65$ より，$m-31\cdot 1>m-31\cdot 2>\cdots>m-31\cdot 65>0$

ここで，これら 65 個の正の整数 $m-31y$ $(y=1,\ 2,\ \cdots,\ 65)$ において，

$m-31y_i\equiv m-31y_j \pmod{65}$ となる $y_i,\ y_j$ $(y_i<y_j)$ の存在を仮定すると，

$m-31y_i-(m-31y_j)\equiv 0 \pmod{65}$　すなわち $31(y_j-y_i)\equiv 0 \pmod{65}$ が成り立つ。

ところが，31 と 65 は互いに素である。また，$0<y_j-y_i\leq 64$ $(\because 1\leq y_i<y_j\leq 65)$ より，

y_j-y_i は 65 で割り切れない。したがって，$31(y_j-y_i)$ は 65 で割り切れない。

これは仮定と矛盾する。

よって，これら 65 個の正の整数 $m-31y$ $(y=1,\ 2,\ \cdots,\ 65)$ を 65 で割った余りはすべて異なる。

これと，整数を 65 で割った余りは $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 64$ の 65 個あることから。

65 個の正の整数 $m-31y$ の 1 つは 65 で割った余りが 0，すなわち $m-31y=65x$ と表せる。

ゆえに，2016 以上の整数 m は，正の整数 $x,\ y$ を用いて $65x+31y=m$ と表せる。